



ارائه مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل برای شیوع سوء مصرف مواد مخدر

سید حمید حسینی^۱، ابوالفضل تاری مرزآباد^۲، مجید حسن پور عزتی^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۶/۲۹

چکیده

هدف: شیوع مصرف مواد مخدر امروزه از جمله مشکلاتی است که به شدت رو به افزایش است و بر کنش‌های اجتماعی افراد معتاد بر دیگر نفرات جامعه بستگی دارد. هدف این پژوهش ارائه یک مدل پیوسته ریاضی با استفاده از معادله انتگرال-دیفرانسیل برای مسئله شیوع سوء مصرف مواد مخدر در بین نفرات یک جامعه مفروض می‌باشد. **روش:** ساختارهای ارتباطی که در شبکه‌ها و سیستم‌های گسسته در میان اعضای یک مجموعه مفروض وجود دارند، می‌تواند به یک مدل شبکه‌ای گسسته و در نهایت به یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل در حالت پیوسته منتهی شود. در این پژوهش مصرف‌کنندگان مواد مخدر و میزان پاک‌ی و سلامت آن‌ها با در نظر گرفتن تأثیر نفرات دیگر جامعه بررسی شده است. **یافته‌ها:** در این مقاله، علاوه بر ارائه مدل‌های گسسته ساده برای مسئله شیوع مصرف مواد مخدر، مدل جایگزین جدیدی به همراه مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل معرفی می‌کنیم که از سکون و اینرسی موجود در مدل‌های قدیمی در شیوع مصرف در بین افراد جامعه دوری می‌کند. **نتیجه‌گیری:** تحلیل‌هایی بر روی مدل‌های شبکه‌ای گسسته برای مسئله شیوع سوء مصرف مواد مخدر در یک جامعه مفروض انجام شد و معادله‌ای ریاضی برای روند انتشار سوء مصرف مواد مخدر با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری نفرات و اثرگذاری افراد معتاد بر دیگران ارائه شد.

کلیدواژه‌ها: مدل ریاضی، وابستگی به مواد مخدر، شیوع

* این طرح با حمایت مالی ستاد مبارزه با مواد مخدر ریاست جمهوری انجام شده است.

۱. نویسنده مسئول: دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران، پست الکترونیک:

Hamidhosseini90@yahoo.com

۲. استادیار گروه ریاضی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

۳. استادیار گروه زیست‌شناسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

مقدمه

بر اساس ماهیت علم اکثر حوادث و اتفاقات طبیعی که در واقعیت آن‌ها را لمس می‌کنیم به زبان ریاضیات می‌توان بیان کرد. این تبدیل زبان کمک می‌کند که از ابزارهای بی‌شماری که در علم ریاضی موجود است استفاده کنیم و در پی آن تحلیل‌ها و برنامه‌ریزی‌هایی را نتیجه‌گیری کنیم. مصرف مواد مخدر امروزه از جمله مشکلاتی است که به شدت رو به افزایش است و شیوع آن در میان جوامع بیش از گذشته باعث تحت تاثیر قرار گرفتن افراد دیگر جامعه به خصوص افراد سالم و پاک شده است. از آنجا که مصرف انواع مختلف مواد مخدر در مصرف‌کننده با بروز اختلالات روانی همراه است، این موضوع می‌تواند زمینه‌ساز ایجاد بسیاری از حوادث و جرائم مانند سوانح رانندگی، نزاع‌ها و سایر آسیب‌های اجتماعی در کشور شود. سطح مصرف مواد مخدر هر جامعه مفروضی در میان افراد آن جامعه یکسان نبوده و به عواملی مانند انعطاف‌پذیری افراد و اثرگذاری افراد معتاد بر دیگر نفرات جامعه بستگی دارد. در این پژوهش سعی شده تا یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل به کمک سیستم‌های شبکه‌ای گسسته برای بررسی شیوع اعتیاد به مواد مخدر ارائه شود. دلیل انتخاب مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل این است که در سال‌های اخیر نشان داده شده در مدل‌سازی ریاضی شیوع بیماری‌های عفونی و ویروسی که از نظر همه‌گیرشناسی و گسترش مشابه با اعتیاد هستند، مدل‌های معادله دیفرانسیل و معادله انتگرال-دیفرانسیل پرکاربرد بوده‌اند (مدلاک، و کات، ۲۰۰۳^۱). با توجه به اینکه اعتیاد دارای برگشت‌پذیری است و فرد مبتلا به آن بعد از بهبودی نسبت به ابتلا مجدد ایمن نخواهد بود، این ویژگی برگشت‌پذیری برای بیماری‌های مشابه با اعتیاد فقط توسط مدل‌های معادله انتگرال-دیفرانسیل قابل مدل‌سازی می‌باشند (فن دن دریشه، و زو، ۲۰۰۷). لازم به ذکر است، در حالی که مصرف مواد مخدر و وابستگی افراد به آن بیماری مدنظر می‌باشد ولی شیوع و اپیدمیولوژی آن به وضوح متفاوت از شیوع در بیماری‌های عفونی و ویروسی مانند سرخک، آنفولانزا و ... می‌باشد. تاکنون در ارتباط با شیوع مصرف مواد مخدر مدل ریاضی

مشابهی ارائه نشده است. اما در این خصوص تحقیقات مشابهی در رابطه با شیوع مصرف الکل با روش مشابه مدل سازی ارائه شده است (براون، ویلسون، پلسکو، باچانان، گلیسون^۱، ۲۰۰۶؛ ویلسون، باچانان، گلیسون، و براون، ۲۰۰۴؛ فرنچ، تیموراوغلو، لویز، و براون^۲، ۲۰۱۰). در منابع ذکر شده مدل شبکه‌ای گسسته با تابع نرخ پایدار برای رفتار و شیوع این شرایط در یک جمعیت به همراه محاسبات ارائه شده است. در این جا به منظور آزمایش پایداری (به طور تحلیلی) مدل‌های جدید ساده‌ای با الهام از مدل شبکه‌ای گسسته ارائه و در نهایت یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل معرفی می‌شود. شرایط زیادی وجود دارند که در آن‌ها نشان داده شده، نفراتی از یک جمعیت می‌توانند بر میزان میل و رغبت افراد دیگر برای مصرف مواد مخدر تأثیر گذار باشند. در حقیقت، با بررسی مطالعات قبلی درمی‌یابیم که تأثیر و نفوذ نفراتی از یک جمعیت بر نفرات دیگر به معنی همان شیوع می‌باشد (فانک، سالاته، و جانسن^۳، ۲۰۱۰). برای مطالعه بیشتر درباره تاریخچه مدل‌های موجود در مباحث اجتماعی خوانندگان را به منابع این پژوهش ارجاع می‌دهیم. اساساً، در این پژوهش به ارزیابی شاخص مصرف مواد مخدر توسط افراد و یا گروه‌هایی از جامعه پرداخته خواهد شد. به این منظور دینامیک‌های موجود در یک جامعه توسط عواملی مانند انعطاف‌پذیری، آمادگی نفرات آن جامعه و روابط اجتماعی آن‌ها مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. ساز و کار این مدل‌ها دارای گنجایشی برای شبیه‌سازی اثر مصرف‌کنندگان مواد مخدر به روی افراد پاک جمعیت می‌باشد (نقل از براون و همکاران، ۲۰۰۶).

روش

مدل معادله دیفرانسیل پایه‌ای: نقطه شروع بررسی‌ها، معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(1) \quad \frac{dv_i}{dt} = v_i(1 - v_i)(n_i - r_i)$$

این معادله دارای تابع نرخ پایداری است و در سیستم شبکه‌ای گسسته مورد استفاده قرار می‌گیرد (براون و همکاران، ۲۰۰۶). در معادله (۱)، تابع $v_i = v_i(t)$ احتمال بروز مشکلات مرتبط با مصرف مواد مخدر را برای فرد i در لحظه t مدل سازی می‌کند (مانند:

1. Braun, Wilson, Pelesko, Buchanan, & Gleeson

2. French, Teymuroglu, Lewis, & Braun
3. Funk, Salathe, & Jansen

دستگیری، تصادف رانندگی، مشاجره و درگیری). فرض می‌کنیم مشکلات مرتبط با مصرف مواد مخدر برای یک شخص می‌تواند به جای کیفی بودن کمی در نظر گرفته شود. در این جا همچنین اصطلاح پاک بودن افراد و یا معتاد بودن آن‌ها (اعتیاد به یک یا چند نوع مخدر) را برای v_i در نظر می‌گیریم. از این پس این تابع را به عنوان تابع اعتیاد معرفی می‌کنیم، این تابع از نوع توابع احتمالی می‌باشد و مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می‌کند. پس اگر فرد i ، پاک باشد $v_i \cong 0$ و اگر فرد i ، معتاد باشد $v_i \cong 1$ می‌شود. تابع اثر $n_i = n_i(t)$ برای اندازه‌گیری تأثیر نفوذ افراد دیگر با در نظر گرفتن وزن‌های w_{ij} می‌باشد.

$$n_i(t) = \sum_j w_{ij} v_j(t),$$

به طوری که $w_{ij} > 0$ ، اندازه ارتباط بین فرد i و j می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که w_{ij} ها نرمال شده هستند ($\sum_j w_{ij} = 1$ برای هر i)، علاوه بر این به جز یک حالت خاص می‌توانیم وزن‌های w_{ij} را متقارن در نظر بگیریم ($w_{ij} = w_{ji}$ برای هر j و i). r_i نیز انعطاف‌پذیری مربوط به فرد i می‌باشد ($0 \leq r_i \leq 1$). هر اندازه r_i نزدیک به عدد یک باشد، فرد i آمادگی کمتری برای معتاد شدن دارد. ما در این جا میزان انعطاف‌پذیری افراد را با ثابت r نشان می‌دهیم. همچنین شرط اولیه

$$(2) \quad v_i(0) = g_i$$

برای تعیین مسئله و جواب آن لازم است.

مدل شبکه‌ای گسسته: در منابع ذکر شده مدل شبکه‌ای گسسته‌ای در نظر گرفته شده است که به نحوی میزان اعتیاد فرد i از مرحله زمانی m تا $m+1$ را در یک شبکه بزرگ به صورت زیر مدل‌بندی می‌کند.

$$(3) \quad v_i^{m+1} - v_i^m = \lambda v_i^m (1 - v_i^m) (n_i^m - r_i) \quad n_i^m = \sum_j w_{ij} v_j^m.$$

در اینجا v_i^m میزان پاک‌ی و سلامت فرد i در زمان t_m است که مقادیری بین اعداد صفر و یک را اختیار می‌کند و $\lambda > 0$ یک نسبت ثابت می‌باشد. اگر فرض کنیم طول گام‌ها

کوچک باشند و همچنین زمان را از نو و دوباره مقیاس‌بندی کنیم آنگاه معادله دیفرانسیل (۱) به عنوان یک تقریب از معادله شبکه‌ای کامل و بزرگ بالا نتیجه می‌شود.

شیوع بیماری به روی شبکه‌ها، همواره یکی از موضوعات مهم مورد بحث و تحقیق علمی در گذشته و حال بوده است. بخصوص وقتی که اتصال‌ها و راه‌های ارتباطی بین نفرات جامعه (گره‌ها) در شبکه یا به صورت تصادفی و یا به صورت از پیش تعیین شده تعریف شده باشد. این منابع روابط زیر را پیشنهاد می‌کنند:

$$(۴) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} v_i^m = \begin{cases} 1, & \bar{v}_0 > \bar{r} \\ 0, & \bar{v}_0 < \bar{r} \end{cases}$$

در اینجا \bar{v}_0 ، شاخص میانگین و اولیه اعتیاد می‌باشد و \bar{r} انعطاف‌پذیری میانگین است. زمانی که $\bar{v}_0 > \bar{r}$ باشد، جامعه شامل مصرف‌کنندگان اولیه مواد مخدر است و زمانی که $\bar{v}_0 < \bar{r}$ باشد، جامعه به طور تحمیلی رو به پاکی هدایت می‌شود.

در منبع براون و همکاران، (۲۰۰۶) یک الگوی درمانی ارائه شده است. آن‌ها فرض کرده‌اند که درصد کوچکی از افراد یک جمعیت با شاخصه‌های اعتیاد بالا می‌توانند درمان شوند. این نفرات ناسالم (با شاخصه اعتیاد بالا) برای یک دوره زمانی مشخص از جمعیت خود به منظور درمان حذف می‌شوند و آنگاه پس از درمان و رسیدن به پاکی به یک جمعیت کلی با همان شاخصه اعتیاد مربوط به خودشان که حالا به میزان نصف سطح انعطاف‌پذیری شان کاهش یافته است، بازگردانده می‌شوند. همچنین با محاسبات عددی درمی‌یابیم که اگر به‌طور سخت‌گیرانه ۷٪ از جمعیت، با توجه به یک پایه و اساس منظم درمان شوند، کل جمعیت پاک می‌شوند. همین موضوع می‌تواند به عنوان یک الگوی بسیار سودمند در باز پروری بیماران معتاد استفاده شود.

در بخش بعدی مجموعه‌ای از مدل‌های بسیار ساده برگرفته از مدل شبکه‌ای گسسته را در نظر خواهیم گرفت این مجموعه شامل مدل‌های بسیار ساده و مهمی از جمله مدل تک متغیره، مدل معادله دیفرانسیل دو جمعیتی و مدل انتگرال-دیفرانسیل می‌باشد. در مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل اثر و نفوذ افراد دیگر جامعه به وسیله یک میانگین ساده محاسبه

می‌شود. همچنین در ادامه معرفی مدل‌ها، مدل جدیدی را به عنوان مدل جایگزین با استفاده از تابع هویساید^۱ معرفی خواهیم کرد. در بخش آخر مدل معادله انتگرال دیفرانسیلی به دست آورده شده را توسعه خواهیم داد. هدف اصلی از این توسعه قرار دادن مدل‌های گسسته در یک چارچوب و قالب پیوسته می‌باشد. این توسعه را با استفاده از کانونولوشن دو تابع v و w انجام خواهیم داد. بررسی و آزمایش این مدل پیوسته واقعی تر و کاربردی تر از مدل گسسته قبلی می‌باشد. با کمک این مدل پیوسته امکان تحلیل عددی بیشتری به ریاضیدانان داده می‌شود تا با نتایج آن نسبت به شرایط واقعی تصمیم‌گیری کنند. لازم به ذکر است که فرض ما در این مقاله بر این است که جواب یکتایی برای معادله انتگرال-دیفرانسیل ارائه شده وجود دارد اما در اینجا اثباتی از وجود آن ارائه نکردیم. خوانندگان محترم می‌توانند برای مطالعه اثبات وجود جواب به منبع فرنچ و همکاران، (۲۰۱۰) مراجعه کنند.

ابزار

مدل‌های الهام گرفته از شبکه‌های گسسته: در این بخش همانطور که گفته شد سه مدل گسسته بسیار ساده ارائه خواهیم کرد.

مدل پایدار مضاعف تک متغیره^۲: فرض کنیم تمام افراد جمعیت از لحاظ تأثیرگذاری و انعطاف‌پذیری و مقدار تابع اعتیاد یکسان باشند (جمعیت همگن باشد) و همچنین این افراد با وزن ارتباطی مساوی با یکدیگر در ارتباط باشند. در این حالت معادله دیفرانسیل (۱) به مسئله مقدار اولیه زیر نسبت به زمان تبدیل خواهد شد.

$$\dot{v} = v(1-v)(v-r) \quad , \quad v(0) = v_0$$

لازم به ذکر است که صفر، یک و r نقاط ثابتی هستند و تابع نرخ $v(1-v)(v-r)$ بیانگر این موضوع است که هرگاه $v_0 < r$ باشد به دلیل کم بودن تابع اعتیاد از انعطاف‌پذیری تابع اعتیاد v به سمت صفر میل خواهد کرد (حالت پاکي) و هرگاه $v_0 > r$ باشد تابع اعتیاد v به سمت یک میل خواهد کرد (حالت اعتیاد). این نتایج دقیقاً با رابطه (۴) سازگار هستند.

1. Heaviside function

2. Single variable bitable model

مدل دو جمعیتی^۱: مدل ساده دیگری که در نظر می‌گیریم شامل دو جامعه متفاوت از هم می‌باشند. برای شروع، جامعه مفروض مورد مطالعه را به دو گروه متفاوت تقسیم می‌کنیم. گروه اول شامل جمعیت بزرگی از افراد معتاد با شاخصه اعتیاد متوسط و گروه دوم شامل جمعیت کوچکی از افراد معتاد با شاخصه اعتیاد بالا که میل و رغبت زیادی به مصرف مواد مخدر دارند، است. در این حالت، مدل به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به فرم زیر خواهد بود:

$$(۵) \quad \dot{v}_1 = v_1(1 - v_1)(kv_1 + (1 - k)v_2 - r_1), \quad 0 \leq k \leq 1,$$

$$(۶) \quad \dot{v}_2 = v_2(1 - v_2)(kv_1 + (1 - k)v_2 - r_2)$$

که:

$$(۷) \quad v_1(0) = v_1^0, \quad v_2(0) = v_2^0.$$

در این مدل در حقیقت با دو جمعیت همگن سروکار خواهیم داشت.

فرض کنیم تابع اعتیاد v_2 مجموعه کوچکی از افرادی هستند که میل زیاد به مواد مخدر و مصرف آن دارند، با این فرض v_1 مابقی نفرات جمعیت را معرفی می‌کند. برای اینکه اثر نفوذ مصرف کنندگان مواد مخدر جمعیت مفروض روی نفرات دیگر قابل چشم پوشی باشد، $k \cong 1$.

لازم به ذکر است که شرایط اولیه زیر در روند کار بسیار تعیین کننده هستند. در واقعیت هم میانگین وضعیت اولیه یک جمعیت در ابتدای کار حائز اهمیت است.

$$v_1(0) = v_1^0, \quad v_2(0) = v_2^0$$

به طوری که اگر اکثریت جمعیت با توجه به شرایط اولیه از ابتدا وابستگی زیادی به مصرف مواد مخدر داشته باشند ($v_1^0 \rightarrow 1$) آنگاه کل جمعیت با گذشت زمان میل به مصرف بیشتر مواد مخدر پیدا می‌کنند. در غیر این صورت یعنی اگر شرایط اولیه اکثریت جمعیت از ابتدا مقدار کمی باشد ($v_1^0 \rightarrow 0$) آنگاه کل جمعیت با گذشت زمان میل به پاک شدن و سلامتی پیدا می‌کنند و از میزان آمادگی و رغبتشان به مواد کاسته می‌شود.

مدل میانگین اثر نفوذ افراد بر روی افراد دیگر جامعه^۱: در این جا فرض می‌کنیم تعداد J نفر وجود دارند که با وزن‌های $w_i = \frac{1}{J}$ ($i = 1, \dots, J$) به یکدیگر متصل هستند و دارای انعطاف‌پذیری یکسان و ثابت r می‌باشند. در این صورت مدل معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$(۸) \quad \frac{dv_i}{dt} = v_i(1 - v_i)(n_i - r), \quad n_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J v_j, \quad i = 1, \dots, J.$$

با فرض $v_i = v(x_i, t)$ و با تعریف $x_i = \frac{i}{J}$ در حالت حدی، معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر را روی بازه $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم:

$$(۹) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v(1 - v)(n - r)$$

که در آن

$$(۱۰) \quad n(t) = \int_0^1 v(x, t) dx$$

معادله بالا را می‌توان به عنوان یک تقریب از معادله (۸) در نظر گرفت. بلافاصله می‌توانیم روابط زیر را که از مزایای این تقریب ساده در فضای پیوسته می‌باشد نتیجه بگیریم:

$$(۱۱) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = \begin{cases} 1 & , \quad \int_0^1 v_0 dx > r, \\ 0 & , \quad \int_0^1 v_0 dx < r, \end{cases}$$

باز هم با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که روابط بالا مشابه روابط (۴) می‌باشند.

اکنون با توجه به نحوه تعریف تابع $n(t)$ (به عنوان یک تابع معلوم) و با در نظر گرفتن تابع اعتیاد v در نقطه مشخص \bar{x} می‌توانیم معادله انتگرال دیفرانسیلی بالا را به صورت تفکیک شده به دست آوریم:

$$(۱۲) \quad \int_{v_0(\bar{x})}^{v(\bar{x}, t)} \frac{du}{u(1-u)} = N(t)$$

که در آن

$$(۱۳) \quad N(t) = \int_0^t (n(s) - r) ds$$

و بلافاصله با حل آن بدست می‌آوریم:

$$(۱۴) \quad v(\bar{x}, t) = \left(1 + \frac{1 - v_0(\bar{x})}{v_0(\bar{x})} e^{-N(t)} \right)^{-1}$$

اگر در رابطه (۱۰) برای هر $\bar{x} \in [0, 1]$ فرض کنیم $0 < v_0(\bar{x}) < 1$ باشد آنگاه خواهیم داشت $0 \leq v \leq 1$.

لازم به ذکر است که با انتگرال گیری از معادله (۹) نسبت به x یک معادله دیفرانسیل معمولی برای تابع n به دست می آوریم:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 v \, dx \right] = \left[\int_0^1 v(1-v) \, dx \right] (n-r)$$

و یا فرض

$$(16) \quad \beta(t) = \int_0^1 v(1-v) \, dx.$$

خواهیم داشت:

$$(17) \quad \frac{d}{dt} (n-r) = \beta(n-r)$$

به طوری که $\beta(t) \geq 0$ می باشد.

فرض کنیم β نامنفی و مفروض باشد، آنگاه می توانیم معادله دیفرانسیل خطی (۱۷) را

برای $n-r$ بر حسب β حل کنیم و خواهیم داشت:

$$(18) \quad n(t) - r = (n(0) - r) e^{\int_0^t \beta(s) ds}$$

اکنون دو نتیجه می توانیم بگیریم:

الف: اگر فرض کنیم $n(0) > r$ و لذا $n(t) - r \geq n(0) - r$

آنگاه وقتی که $t \rightarrow +\infty$ داریم:

$$e^{-N(t)} = e^{-\int_0^t (n(s)-r) ds} \\ \leq e^{-(n(0)-r)t} \rightarrow 0$$

بنابراین از (۱۰) نتیجه می گیریم که هرگاه $t \rightarrow +\infty$ آنگاه $v(\bar{x}, t) \rightarrow 1$

ب: اگر $n(0) < r$ ، مانند روند بالا نتیجه خواهیم گرفت که هرگاه $v(\bar{x}, t) \rightarrow 0$

$t \rightarrow +\infty$ آنگاه در نتیجه رابطه (۱۱) ثابت می شود.

مدل جایگزین^۱ جدید: حال مدلی را پیشنهاد می‌کنیم که شامل یک جایگزینی با تابع هویساید وابسته به علامت تابع $n_i - r_i$ می‌باشد. این مدل دینامیک و رفتار زمانی بلند مدت مشابه با دستگاه پایدار مضاعف (۳) را دارد. در این حالت داریم:

$$(19) \quad \frac{dv_i}{dt} = -H(r_i - n_i)v_i - H(n_i - r_i)(v_i - 1)$$

که:

$$(20) \quad n_i(t) = \sum_j w_{ij}v_j(t)$$

و $H = H(s)$ تابع هویساید است.

$$H(s) = \begin{cases} 1 & \text{و } s > 0 \\ 0 & \text{و } s \leq 0 \end{cases}$$

لازم به ذکر است اگر $r_i < n_i$ باشد آنگاه $\frac{dv_i}{dt} = -v_i$ بنابراین $v_i \rightarrow 0$ (پاکی). و اگر $r_i > n_i$ باشد، آنگاه $\frac{dv_i}{dt} = -(v_i - 1)$ و $v_i \rightarrow 1$ (اعتیاد). در هر صورت v_i نمی‌تواند بزرگتر از یک و یا کوچکتر از صفر باشد که مشابه موارد گفته‌شده در مدل پایدار مضاعف می‌باشد.

در نهایت چون $H(r_i - n_i) + H(n_i - r_i) = 1$ می‌در یابیم که:

$$(21) \quad \frac{dv_i}{dt} = -v_i + H(n_i - r_i).$$

یافته‌ها

مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل: در این بخش یک مدل معادله انتگرال-دیفرانسیل را با استفاده از مطالب بخش گذشته معرفی می‌کنیم. در واقع هدف از ارائه این مدل تعمیم مدل شبکه‌ای گسسته به صورت یک مدل پیوسته است. برای شروع با الهام از مدل شبکه‌ای گسسته بخش قبل مدل انتگرال-دیفرانسیل زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

$$(22) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v(1 - v)(n - r).$$

در این مدل $v = v(x, t)$ میزان پاکی افراد را در موقعیت x و زمان t نشان می‌دهد. مشابه آنچه که قبلاً بیان شده، اگر $v \cong 0$ باشد فرد موردنظر پاک می‌باشد و همچنین افراد معتاد

با توجه به میزان اعتیادشان به مواد مخدر تابع اعتیادشان مقداری را بین صفر و ۱ اختیار می‌کند. واضح است که نفرات معتاد با میزان وابستگی بالا به مواد مخدر، تابع اعتیاد نزدیک به ۱ دارند ($v \cong 1$).

تابع $n = n(x, t)$ هم میزان تأثیر و نفوذ دیگر افراد در ارتباط با افراد را در موقعیت x و زمان t نشان می‌دهد که برابر با کانولوشن دو تابع w و v می‌باشد.

$$(23) \quad n(x, t) = (w * v)(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)v(y, t) dy.$$

به طوری که $w > 0$ تابع وزن یا ردپا^۱ ($\int_R w ds = 1$) است. این تابع $w = w(s)$ یک انعطاف‌ناپذیری انتقالی^۲ را به مدل تحمیل می‌کند که در حالت گسسته وجود نداشت. همچنین فرض می‌کنیم که میزان انعطاف‌پذیری افراد نیز ثابت باشد ($0 \leq r \leq 1$). برای کامل کردن مدل، نیاز به شرط اولیه $v(., 0) = v_0$ داریم.

اکنون جامعه ای از نفرات را در نظر می‌گیریم که به طور منظم بر روی خط اعداد حقیقی مرتب شده‌اند، به طوری که فرد در موقعیت مکانی $x_i = i\Delta x$ ($0 < \Delta x \ll 1$) قرار دارد. همانطور که اشاره شد فرض بر این است که ارتباط‌ها بین نفرات جامعه با تابع ردپا w مدل بندی شود. با قرار دادن $w_{ij} = \Delta x w(x_i - x_j)$ آنگاه می‌توان تابع $n_i(t)$ را در معادله (۱) به وسیله یک انتگرال تقریب کرد.

$$(24) \quad n_i = \sum_j w_{ij} v_j = \sum_j \Delta x w(x_i - x_j) v(x_j, .) \\ \cong \int w(x_i - y) v(y, .) dy = n(x_i, .).$$

شایان ذکر است که این مدل همانند مدل‌های (۱) و (۳) دارای این ویژگی می‌باشد که هرگاه نفرات جهت‌گیری خود را در هر دو مسیر پاکی و اعتیاد داشته باشند آنگاه کمتر مستعد پذیرش تأثیر از افراد دیگر جامعه (تحت تأثیر پارامتر $(v(1-v))$ می‌باشند).

بحث و نتیجه‌گیری

بر اساس مدل ارائه شده تحلیل، برنامه‌ریزی، کنترل و ساماندهی پدیده شیوع مصرف مواد مخدر قابل مدل‌سازی ریاضی می‌باشد. بر اساس رفتار جامعه مفروض از مدل ریاضی

طراحی شده پس از اعتبار سنجی جهت پیش بینی و تغییرات رفتار جامعه براساس تغییرات پارامترها استفاده می شود، همچنین با یک الگوی درمانی جامع و صحیح می توانیم افرادی را که دارای شاخصه اعتیاد بالا هستند در میان یک جمعیت پاک و سالم قرار داده و با گذشت زمان شاهد این هستیم که نفرات پاک آن جمعیت مفروض با اثر مثبت خود بروی نفرات معتاد توانسته اند میزان میل و دلبستگی آن ها به مصرف مواد مخدر را کاهش دهند. همچنین با استفاده از مدل ارائه شده می توان سرعت شیوع در میان افراد یک جامعه را تخمین زد. این موضوع با ابزارهای ریاضی پیشرفته مانند تقریب بوسیله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل تحلیل عددی بیشتری است. همچنین لازم به ذکر است که مدل انتگرال-دیفرانسیل ارائه شده در این مقاله می تواند شروع خوبی برای علاقه مندان به مباحث ریاضی برای تحلیل های بیشتر باشد. تحلیل عددی مدل (۲۴) با روش های جدید و دقیق تر به عنوان کارهای تحقیقاتی جدید پیشنهاد می شود تا بتوان تحلیل های دقیق تری ارائه کرد.

منابع

- Braun, R. J., Wilson, R. A., Pelesko, J. A., Buchanan, J. R., Gleeson, J. P. (2006). Applications of small word network theory in alcohol epidemiology. *Journal of Studies on Alcohol and Drugs*, 67(4), 591-599. DOI: 10.15288/jsa.2006.67.591.
- Braun, M. (1992). *Differential equation and their applications: An Introduction to Applied Mathematics (Texts in Applied Mathematics) (v. 11)*, Fourth Edition, Springer, 67-80.
- French, D. A., Teymuroglu, Z., Lewis, T. J., Braun, R. J. (2010). An integro-differential equation model for the spread of alcohol abuse. *Journal of Integral Equations and Applications*, 22(3), 443-464.
- Funk, S., Salathe, M., Jansen, V. A. A. (2010). Modeling the influence of human behavior on the spread of infectious diseases: A review. *Journal of the Royal Society, Interface*, 7(50), 1247-1256. DOI: 10.1098/rsif.2010.0142.
- Hethcote, H. W. (2002). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599-653.
- Medlock, J., & Kot, M. (2003). Spreading disease: Integro-differential equations old and new, *Mathematical biosciences*, 184(2), 201-222.
- Van den Driessche, P., Zou, X. (2007). Modeling relapse in infectious diseases. *Mathematical Biosciences*, 207(1), 89-103.
- Wang, J., Pang, J., Liu, X. (2014). Modeling diseases with relapse nonlinear incidence of infection: a multi-group epidemic model, *Journal of Biological dynamics*, 8(1), 99-116. DOI: 10.1080/17513758.2014.912682.
- Wilson, R. A., Buchanan, J. R., Gleeson, J. P., Braun, R. J. (2004). A network model of alcoholism and alcohol policy, *Proc. Mathematics Problems in Industry Workshop*.